$$\int_0^t f^{(1,0)}(x+(-1)^i a_i(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C(G), \quad i=1,2, \tag{5}$$

$$\alpha_2(0)\{\alpha_1[f(0,0)+(a_2-a_1)\psi'(0)+a_1a_2\varphi''(0)-(b_1+b_2)\psi(0)-(a_1b_2-a_2b_1)\varphi'(0)-b_1b_2\varphi(0)]+ \\ +\beta_1\psi'(0)+\gamma_1\psi(0)\}+\beta_2(0)[\alpha_1\psi'(0)+\beta_1\varphi''(0)+\gamma_1\varphi'(0)]+ \\ +\gamma_2(0)[\alpha_1\psi(0)+\beta_1\varphi'(0)+\gamma_1\varphi(0)]=\mu(0). \tag{6}$$

Здесь одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно первая и вторая производные этих функций, $C^{(i)}(\Omega)$ — множество i раз непрерывно дифференцируемых функций в Ω, $i=1,2$, $C(\Omega)$ — множество непрерывных функций в Ω и индекс $(1,0)$ над функцией $f(y,s)$ обозначает первую частную производную от f по переменной y.

Впервые явные формулы классических решений смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны (т. е. уравнения (1) при $a_1 = a_2 = a$ и $b_1 = b_2 = 0$), а также необходимые и достаточные условия на правую часть f, начальные данные φ, ψ и граничное данное μ были получены в случае нестационарной первой косой производной в граничном условии (т. е. условия (3) при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$) в работе [1]. Для однородного уравнения колебаний полуограниченной струны (т. е. уравнения (1) при $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = 0$ и $f = 0$) явные формулы классических решений при нестационарной первой косой производной в граничном условии, а также достаточные условия на начальные данные φ, ψ и граничное данное μ были найдены С.Н. Барановской и Н.И. Юрчуком в [2].

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. *Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии* // Вестн. БГУ. 2012. Сер. 1, №1. С. 83–86.

2. Барановская С.Н., Юрчук Н. И. *Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, №8. С. 1188–1191.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ф.Е. Ломовцев, В.И. Яшкин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
lomovcev@bsu.by, yashkin@bsu.by

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Используя понятие слабой производной по параметру t линейных неограниченных операторов $A(t): H \supset D(A(t)) \to H$ с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и формулу этой производной из [1], доказано существование и единственность слабых решений задачи Коши:

$$u_{tt}(t)+A(t)u(t)=f(t), \quad t\in]0,T[, \quad u(0)=u_0, \quad u_t(0)=u_1. \tag{1}$$

Определение слабых решений $u\in\mathcal{H}=L_2(]0,T[,H)$ задачи Коши (1) приведено в [2].

С помощью проекционной теоремы Ж.-Л. Лионса установлена теорема 1 существования.

Теорема 1. *Пусть при всех* $t \in [0,T]$ *самосопряженные положительные операторы* $A(t)$ *в* H *имеют ограниченные обратные операторы* $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, *которые в* H *сильно непрерывны по* t *и имеют по* t *ограниченную сильную производную* $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, *удовлетворяющую неравенству* $((dA^{-1}(t)/dt)g,g) \leqslant \leqslant c_1(A^{-1}(t)g,g)$, $g \in H$, $c_1 \geqslant 0$. *Тогда для любых* $f \in \mathcal{H}^-$, $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$ *существуют слабые решения* $u \in \mathcal{H}$ *задачи* (1).

Здесь символом $\mathcal{H}^- = L_2([0,T[,H_t^-)$ обозначено банахово пространство, где H_t^- — антидвойственные банаховы пространства с негативными нормами $[\cdot]_{(-t)}$ к гильбертовым пространствам H_t^+, полученным наделением областей определения $D(A^{1/2}(t))$ квадратного корня $A^{1/2}(t)$ из операторов $A(t)$ позитивными эрмитовыми нормами $[\cdot]_{(t)} = |A^{1/2}(t)\cdot|$, $t \in [0,T]$.

С помощью рассуждений от противного установлена теорема 2 единственности.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы* 1 *и при почти всех* $t \in]0,T[$ *в* H *существует вторая ограниченная сильная производная* $d^2A^{-1}(t)/dt^2 \in \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, *удовлетворяющая неравенству* $|((d^2A^{-1}(t)/dt^2)g,v)| \leqslant c_2|g| \times \times \sqrt{(A^{-1}(t)v,v)}$, $g,v \in H$, $c_2 \geqslant 0$. *Тогда для всех* $f \in \mathcal{H}^-$, $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$ *слабые решения* $u \in \mathcal{H}$ *задачи* (1) *единственны.*

В отличие от работы [2] мы не используем абстрактные сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I+\varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, со множествами значений $D(A(t))$ в H при доказательстве теоремы 1 и интегральные сглаживающие операторы $J_\delta^{-1}(t) = (I - \delta(d/dt))^{-1}$, $\delta > 0$, со множеством значений $D(J) = \{w \in \mathcal{H} : dw/dt \in \mathcal{H}, w(T) = 0\}$ в $\mathcal{H}$ при доказательстве теоремы 2.

На основании теорем 1 и 2 из проекционной теоремы Ж.-Л. Лионса выводится априорная оценка для слабых решений $u \in \mathcal{H}$ задачи Коши (1):

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \leqslant c_3\left(\int_0^T [f(t)]_{(-t)}^2 dt + |u_0|^2 + [u_1]_{(-0)}^2\right), \quad c_3 = 4\max\{1, \sup_{0<t<T} \|A^{-1/2}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}^2\},$$

из которой вытекает непрерывная зависимость слабых решений $u \in \mathcal{H}$ от правой части $f \in \mathcal{H}^-$ и начальных данных $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$.

Литература

1. Ломовцев Ф. Е. *Дифференцирование по параметру линейных операторов с зависящей от параметра областью определения* // Докл. Академии наук. 2012. Т. 445, № 6. С. 628–630.
2. Ляхов Д. А., Ломовцев Ф. Е. *О слабых решениях задачи Коши для гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменной областью определения* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 1. С. 44–49.

ОБ ОДНОЙ РАБОТЕ Ц. БУРСТИНА И В. МАЙЕРА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

К.Д. Лукин, Г.Ф. Кобяк

Минский Филиал МЭСИ, Минск, Беларусь {klukin,gkobjak}@mesi.ru

В [1] рассматривались две статьи Ц. Бурстина и В. Майера. При этом основное внимание было уделено первой статье. Здесь мы рассматриваем подробнее результаты второй статьи [2], в которой исследуется система двух уравнений в частных производных второго порядка:

$$r = f(x,y,z,p,q,s), \quad t = \varphi(x,y,z,p,q,s). \tag{1}$$